# HIERONYMI CARDANI, DE NVMERORVM PROPRIETATIBVS LIBER VNICVS.

## CAPVT PRIMVM.

### *DE PROPRIETATIBVS VNIVS NVMERI & Secundi. Primò, De his quæ ab Euclide describuntur in Septimo & Octauo & Nono Libro suorum Elementorum.*

1 NVMERORVM alij dicuntur primi qui à nullis aliis numerantur vt 7 & 43. alij compositi vt 10 quia ab aliis numerantur vt à 2 & 5 nam ducto 2 in 5 fit 10. Hoc autem in tractatu de integris declaratum est. Compositorum quidam superficiales vocantur qui à duobus producuntur vt 10 à 2 & 5 & 36 à 18 & 2 vel à 3 & 12 vel à 4 & 9. alij solidi cum componuntur ex tribus vt idem 36 cum componitur ex 6. & 3. & 2. nam ducto 3 in 6 fit 18. & ducto 8. in 2 fit 36. Igitur omnis solidus potest esse superficialis non autem omnis superficialis solidus. Nam 10 nullo modo potest dici solidus. Quidam vero numeri ex pluribus quam quatuor componuntur vt 120. ex 5.4.3.2. Sed hoc non considerat Euclides quia in continuis nihil est vltra corpus & hoc non intelligitur habere plusquam tres demonstrationes. Ideo finis Euclidis est in numeris ad solidos velut in continuis ad corpora. Superficialiũ & solidorum quidam ex æqualibus numeris constant & vocantur Quadrati. Si sint superficiales aut cubi si sint solidi 4 igitur est Quadratus: constat enim ex 2 in 2 & 9 est quadratus: constat enim ex 3 & 3 & 36 vt constat ex 6 in 6 est etiam quadratus, vt verò constat ex 3 in 12 est contentus sub genere communi, id est vocabitur superficialis. Et ita 5 est cubus constans ex 2 & 2 & 2. & 27, cubus ex 3 & 3 & 3, constans & 64 cubus, ex 4 & 4 & 4, vt vero constat ex 24. 8. non est cubus sed solidi nomine tantum nuncupatur, vt vero constat ex 32 & 2 dicitur superficialis, vt vero constat ex multiplicatione 8 in 8 dicitur quadratus. Item igitur numerus quandoque potest dici cubus & quadratus & solidus purus & superficialis purus: numeri vero æquales producentes solidos cubos vocantur latera cubica seu radices cubicæ. Et producentes quadratos superficiales latera vel radices quadratæ.

2 Osiander vero conatus est omnes numerorum species ad Euclidis ordinem reducere & pro illo intelligere decet primum statui latus secundum quadratum, tertium cubum, quartum quadratum superficialem,

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 1 | Vnitas. |
| p | 2 | Latus. |
| 2 | 4 | Quadratus. |
| 3 | 8 | Cubus. |
| 4 | 16 | Quadratus superficialis. |
| 5 | 32 | Superficialis oblongus. |
| 6 | 64 | Cubus Quadrati. |
| 7 | 128 | Solidus oblongus. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 256. | Quadratus. | 2ˢ |
| 9 | 512. | Cubus | 2ˢ |
| 10 | 1024. | Quadratus Superficialis | 2ˢ |
| 11 | 2048. | Superficialis Oblongus | 2ˢ |
| 12 | 4096. | Cubus Quadrati | 2ˢ |
| 13 | 8192. | Solidus Oblongus | 2ˢ |
| 14 | 16384. | Quadratus | 3ˢ |
| 15 | 32768. | Cubus | 3ˢ |
| 16 | 65536. | Quadratus Superfic. | 3ˢ |
| 17 | 131072. | Superfic. Oblongus | 3ˢ |
| 18 | 262144. | Cubus Quadrati | 3ˢ |
| 19 | 524288. | Solidus Oblongus | 3ˢ |

id est qui etiam inæqualibus componitur: nam primus quadratus est purus si sit latus eius numerus, quintum superficialem oblongum, sextum cubum Quadrati, septimum solidum oblongum, & post hos septem recurrunt alij sex eodem ordine vsque ad trigesimum, & post rursus alij sex eodem ordine vsque ad decimum nonum, & sic in infinitum vt in figura. Qui ergo locantur in secundo ordine vocantur secundi qui in tertio autem vocantur tertij vt cubus tertius & cubus quadratus tertius, id est ante quem versus vnitatem sunt duo alij eiusdem generis Cubus autem quadratus est cubus alicuius numeri semper quadrati aut quadratus alicuius cubi. Sed superficialis oblongus est qui est ante cubũ quadrati proximus:& solidus oblongus qui subsequitur, & non seruant ordinem vt possint esse Relati primi vel secundi: quia 2048 non est relatum alicuius numeri, sed 1024 qui est ante eum. Oportet igitur in hoc seruare regulas positas in tertio & quarto libro seu in libris de numeris irrationalibus & denominationibus. Hæc tamẽ regula deseruit vltra id quod vidisti ad quatuor & quinque, ad multiplicationem. Nam in ea adde numeros inuicem ordinis & coniunctus est numerus producti Exemplum volo ducere solidum oblongum in quadratum superficialem, addo 7 & 4 numeros ordinis illorum fit 11 numerus superficialis oblon gus secundus, ostendit autem hoc quod si ducas 128 in 16 fit 2048. In Diuisione vero sufficit detrahere numerum diuisoris à diuidendo & relictus est numerus prodeuntis. Exemplum volo diuidere cubum quadrati tertium per solidum oblongum secundum detraho 13 & 18 relinquitur 5 numerus superficialis oblongi. Et sic etiam diuiso 262144 per 8192 exit 32. In inuentione autem lateris & est tertia vtilitas cuius ordinis pro quadrato deinde per 2 pro cubo per 3 pro cubo quadrati per 6 numerum ordinis & exibit numerus ordinis lateris. Exemplum volo latera quadrata cubica, & cubica quadrata cubi quadrati secundi eius numerus est 12 diuido per 2, per 3, & per 6 exeunt 6 pro latere quadrato, & 4 pro cubico, & 2 pro cubico quadrato igitur latus quadratum eius est cubus quadrati primus & latus cubicum est quadratus superficialis primus & latus quadratum cubicum est quadratus primus qui est indirecto 2 prodeuntis. Et sic latus quadratum 4096 est 64 etiam & cubicum est 16 & quadratum cubicum 4. Quarta vtilitas est quod per hoc hoc possum scire qualis naturæ sit quilibet numerus habito ordine, nam si maior sit senario talis. Diuide per 6 & si nihil remanet est cubus quadrati. Si remanet 1. solidus est oblongus, si 2. quadratus, si 3. cubus, si 4. quadratus superficialis, si 5. superficialis oblongus, si 6. vero & nos addimus 11 cuius ille non meminit in sua exempla & est quod possum scire quot quadrata præcesserint, vel cubi quadrati. In quadratis proueniens per 2 ostendit facta diuisione quadrata & per 3 cubos, per 6 cubos quadratos, exemplum volo scire 4. 5. numerum in ordine qualis sit & quot illum præcedant numeri quadrati cubi & quadrati cubi. Diuido eum per 6. & relinquitur 3. igitur ipse est cubus & quia ex tali diuisione prouenit 7. ante eum septem quadrati cubici erunt. Diuido etiam per 3. exit 15. & decimus quintus numerus est eius latus cubicũ & ipse etiam est quintus decimus cubus eius ordinis numerorum diuido etiam 45. per 2 & exeunt 22 & tot præcesserunt numeri quadrati posito latere numero primo.

Compositi igitur numeri aut æquales 3
sunt suis numeratoribus vnitate computata & vocantur, perfecti vt 6. qui est æqualis 3. 2. 1. pariter acceptis à quibus numerantur & 18 qui est æqualis 14. 7. 4. 2. 1. numeratoribus suis. Quorum verò numeratores iuncti maiorem conficiunt numerum ipso numerato: eorum nomen est superabundans seu abundans, vt 12 quia 6. 4 & 3 & 2 & 1 numeratur qui conficiunt 16 maiorem 12. Si vero minor sit qui conficitur ex numeratoribus ipso numerato dicitur numerus ille diminutus, vt 10 qui numerantur à 5 & 2 & 1 qui iuncti faciunt 8 minorem ipso 10.

. Omnis numerus numeratus ab abundan- 4
ti vel perfecto est abundans, vt 12 & 56. nam si 6. est perfectus igitur æquatur partibus suis, quare cum ille numeret numerum numeratum a. b. secundum eum numerum secundum quem numerabant 6. ductum in illum secundum quem 6 numerat suum multiplicem: & ideo quilibet illorum est eadem pars producti qualis est prior numerus numeri perfecti: sequitur vt ex illis solis deficiat quartum multiplex ab vnitate. Sed ei superadduntur multiplex & numerus perfectus loco eius, & etiam ipsæ partes

6——7——42
3. 2. 1. 21. 14.
3. 2. 1.
7
6
54.

Igitur abundat exemplum capio 42 qui producitur ex 7 in 6 numerum perfectum igitur sicut 3 & 2 faciunt $\frac{5}{6}$ de 6 ita ducto 3 & 2 in 1, fiunt 21 & 14, qui sunt $\frac{5}{6}$ de 42 deinde superest ad complendum $\frac{1}{6}$ de 42 minus vnitate, sed $\frac{1}{6}$ de 42 est 7. ex supposito, igitur cum 7. iam & ipse numeret: ipsæ partes iam æquantur 42, sed cum hoc superest ipse numerus perfectus cum suis numeratoribus igitur 42 est abundans.

Corollarium

Corollarium ex hoc patet quod quilibet numerus numeratus à numero perfecto secundum aliquem numerum primum abundat in duplo numeri perfecti ipsius secundum numeratores ab ipso numerato, vbi talis numerus primus non sit ex numeratoribus numeri perfecti. Exemplum 30 numeratur à 6 perfecto per 5 numerum primum qui non numerat 6 dico quod partes numerantes ipsum conficiunt 42. Id est duplum numeri perfecti plus ipso numero numerato & ita 140 qui producitur ex 28 perfecto in 5 primum non numerantem 28 perfectum numerabitur à partibus conficientibus 196 quod est 56 plus numerato. Corollarium secundum sequitur etiam vt nullus numerus perfectus ab alio perfecto numero possit numerari. Nã qui numeraretur ex regula abundans esset non igitur perfectus, de composito autem demonstratio clara est.

5 Perfecti vero numeri creatio clara est vltima noni Elementorum Euclidis sume quotlibet numeros ab vnitate in continua proportione duplo sic vt aggregatum illorum

1
2 1
4—7—28. 2
4
8
16—31—496.

faciat numerum primum. Tunc vltimus illorum in aggregatum ductus producit perfectũ velut in exemplis vides, nam 7. aggregatum primi exẽpli est numerus primus, ideo ductus in 4 producit 25 perfectũ & in secundo exemplo 31 est numerus primus & est aggregatũ 1.2.4.8.16. ideo ducto 31 in 16 maximum ex his producitur 496 perfectus numerus. Corollarium ex hoc sequitur quod maximi numeri in proportione dupla cum terminetur in 2 vel 4 vel 6 vel 8 vel nunquam inuacuam notam, id est in o cæterum cum maximus in 2 aggregatum terminatur in 3 cum autem in 4 terminatur maximus numerus, aggregatum terminatur in 7. cum autem in 6 terminatur maximus numerus, aggregatum terminatur in 1. & cum maximus numerus terminatur in 8 ag-

2. 4. 6. 8.
3. 7. 1. 5.
6. 8. 6.

gregatum terminatur in 5, sed terminatorum in 5 nullus potest esse primus nisi 5 vt 15 & 25, nam numerantur a. 5. igitur omnes perfecti producuntur ex numeris terminatis in 3 & 2 vel in 6 & 1 vel in 4 & 7, sed ex 2 in 3 & ex 6 in 1 fit 6 & ex 4 in 7 fit 8 igitur omnes numeri perfecti necessario terminantur in 6 vel 8 & procedunt alternando semper, item ferme vnus inuenitur in singulis productis à 10. seu inter numeros continuè proportionales in proportione decupla, vt inter 1. & 10 inuenitur 6 inter 10 & 100. habemus 28. inter 100 & 1000 est 496 inter 1000 & 10000 habemus 8128. Sed quia regula hæc non est omnino generalis, ideo est parui momenti.

6 Omnis numerus ex serie aliqua continue proportionalium ab vnitate, cuius proximus ab vnitatete primus fuerit est numerus diminutus. Et partes illũ numerantes sic habentur detrahe vnitatem à proximo, & etiam à numero proposito & diuide residuum maius per minus quod exit est aggregatum partium numerantium. Exemplum sit 2187 ex serie

1
3 ) 2
9
27
81 2186
243 2
729 1093
2187

constitutorum in tripla proportione ab vnitate, & quia proximus ab vnitate est 3 numerus primus dico 2187. esse diminutum. Vt autem scias numeros à quibus numerantur detrahe. 1. ex 3 fit 2 detrahe 1. ex 2187 fit 2186. diuide 2186 per 2 exit 1093 & omnes numeri numerantes 2187 iuncti faciunt 1093.

Omnis numerus productus ex duobus numeris primis est diminutus vel perfectus, & numerãtes ipsi sunt aggregatũ ex duobus primis addita vnitate velut. 35. producitur ex 7 & 5 numeris primis ideo 35 sunt iũcti 13, id est vnitate plus aggregato illorum duorum productiuo, declaratum enim est in tractatu de integris quod numeri primi sunt inuicem primi. 7

Cum aliquis numerus producitur ex duobus numeris ad inuicem primis altero primo altero composito. Tunc aggregatum numerorum numerantium numerum productum constat ex producto numerantium compositum, in 1 p. numero primo, addito ipso numero composito, exemplum 60 producitur ex 5 & 12 inuicem primis & 5 est primus & 12 compositus, volo scire aggregatum numeratum 60. 8

60
5—12
6—16—96—100

12
3—4
4—3—12—16

quæro aggregatum numerantium 12 vt docebo, nunc & est 16 duco igitur 16 in 1 p. quam sit 5 fit 96. nam p. de 5 est 6 ad 96 ipsum 12 fit 108 aggregatum numerorum numerantium 60. & similiter volo numeros numerantes 12. ipse producitur ex 3 & 4 inuicem primis quorum 3 est primus & 4 est compositus. Igitur ex sexta regula aggregatum numerantium 4 est 3 nam 4 numeratur à 2 & 1 addi igitur 1 ad primum 3 fit 4 duco in 3 aggregatum numerantium 4 fit 12 addo compositum numeratorem fit 16 aggregatum numerantium 12 quod est propositum.

Cum vero aliquis numerus producitur ex duobus numeris quorum vnus aliũ numerat & est primus tunc sciemus aggregatum numerantiũ productum ducto numero primo producente in aggregatum numerantiũ compositum & addendo omnes numeros numerantes cõpositi qui non numero à primo. 9

Exemplum volo numeros numerantes 200 hic non potest diuidi sub Ratione præcedentis regulæ. Nam si diuiditur per 25 & 8 quamuis si sint inuicem primi, vterque tamen eorum est compositus. Ideo assumo 5

200
40——5
50——250
8
4
2
1
265

& 40. & quia 5 numerat 40 quæro primò per præcedentem regulam aggregatum numerorum numerantium 40 quod inuenio esse 50 duco in 5 fit 250, huic addo omnes numeros numerantes 40 qui non numerātur a. 5 & sunt 8. 4. 2. & 1. qui iuncti faciunt 15 addito igitur 15 ad 250 fit 265 aggregatum numerorum numerantium 200. vt patet. Corollarium ex hoc patet modus proposito quouis numero sciendi à quot numeris numeratur. Id est sciendi aggregatum numerantium illum. Nam ex libro de integris scies primo an sit primus vel non. Deinde si compositus quis sit maximus numerans illum ex primis quo inuento si numerat illum secundum alium numerum primum, vt 341 qui producitur ex 11 in 31 scis aggregatum per septimā regulam. Si vero numerat secundum compositum numerum, at non numeratū ab eo, vt 280 cum producatur ex 7 in 40 vel ex. 5. in 36 scies aggregatū per octauā regulam. Nam aggregatum de 40 est 50 igitur aggregatum de 250 est 440. Si vero numerat secundum numerum ab eo numeratum habes aggregatum per hanc regulam. Horum autem trium vnum euenire necesse est dicente Euclide omnis numerus vel est primus vel ab aliquo primo numeratur.

10 Compositi numeri similes dicuntur cum producentes illos in eadem Ratione fuerint: superficiales si à duobus, solidi si à tribus. Velut 6 producitur ex 2 & 3, qui sunt dimidium 4 & 6 producentium 24 igitur 6 & 24 dicuntur superficiales similes eadem ratione 24 & 3000. sunt solidi similes, quia latera 24 sunt quinta pars referendo singula singulis laterum 3000

6——2——3
24——4——6

24. 2. 3. 4.
3000. 10. 15. 20.

& sunt tria vtrinque vt vides. Et nota quod 2 & 8 sunt superficiales similes qua latera 2 sunt 2 & 1 & latera 8 sunt 4 & 2, & ratio laterum est vtrinque dupla & similiter 2 & 16 sunt solidi similes, nam latera 2 sunt 2.1.1. & latera 16. sunt 4. 2.2. & proportio vtrinque dupla.

11 Quilibet numeri similes superficiales sunt in proportione duorum quadratorum: & etiam conuerso modo qui sunt in proportione duorum quadratorum similes sunt. Et similiter quilibet similes numeri solidi sunt in proportione cuborum: & etiam conuerso modo qui sunt in proportione cuborum sunt similes. Exemplum habes in superficialibus proportio 24 ad 6. est vt 4 ad 1 quadrati ad quadratum. Et proportio 3000 ad 24 est vt 125 cubi ad 1. Cubum Corollarium ex hoc patet quod diuiso superficiali per superficialem similem exit numerus quadratus: & diuiso solido per solidum similem exit cubus: & etiam conuerso modo. Vt si ex diuisione duorum numerorum proueniat quadratus superficiales sunt similes: si autem cubus solidi similes erunt exemplum habes in regula. Corollarium 2. ex hoc cognoscuntur numeri quilibet an sint superficiales, an solidi similes diuidendo maiorem per minorem vel minorem per maiorem. Quamquam enim proueniat fractus tamen videatur quod dictum est, sed non ad intentionem Euclidis: Verum Euclides posuit hanc regulam: sed sub aliis verbis.

Cum diuisi sint duo numeri superficiales aut solidi similes per eundem numerum & ex diuisione superficialis vnius prouenerit quadratus vel ex diuisione solidi cubus: erit quod prouenit ex diuisione alterius superficialis quadratus vel solidi etiam cubus. Exemplum diuidantur 24 & 6 per 6 & proueniant 4 & 1 dico quod si 4 est quadratus 1. etiam est quadratus. Et si diuisis 24 & 3000 per 3 exeunt 8 & 1000 quod si 8 est cubus etiam 1000 est cubus & sic Euclides omnes numeros fractos deuitat. Ideo 54 & 16 sunt solidi similes quod patet facta diuisione per 2. & si dicas 16 diuisus per 16 producit cubum: & 54 diuisus per 16 non producit cubum? Respondeo quod prouenit cubus, sed non integer. Euclides autem supponit quod ex vtriusque diuisione integer numerus proueniat. 12

Omnes duo superficiales similes numeri inuicem ducti quadratum producunt. Et omnes duo numeri producentes quadratum sunt superficiales similes. Exemplum 6 in 24 producit quadratum 144 & si ex 2 in 72 producitur 144 quadratus 2 & 72 necessariò sunt superficiales similes. Hæc autem regula in solidis comparatis ad cubos vera non est. Corollarium diuiso igitur quadrato numero per alium quempiam producetur illi similis vt diuiso 81 per 3. exit 27. & sicut 3 producitur ex 3 in 1 sic 27 ex 9 in 3 est autem laterum ratio tripla. 13

Proportio superficialium similium est vt laterum duplicata: solidorum autem triplicata velut proportio 24 ad 6 est quadrupla & laterum dupla & proportio 150 ad 6 est vt laterum duplicata, nam laterum proportio est quintupla superficialium autem ipsorum viginti quincupla. Nam quin- 14

25 ( 150——15——15 / 6——3——2 ) 5

tupla in se ducta viginti quincuplam producit, vt in tractatu de proportionibus ostendimus. Et similiter in cubis & solidis proportio 27 ad 8 est, vt 3 ad 2 triplicata & 3000 ad 24 vt 10 ad 2 vel 15 ad 3 vel 20 ad 4 triplicata. Et hoc est quoniam proportio laterum est quincupla & solidorum centum viginti quincupla.

Inter

15 Inter quoslibet duos superficiales similes vnus cadit medius proportionalis. Et si cadit sunt superficiales similes. Et inter quoslibet duos solidos similes cadunt duo numeri in continua proportione: & si cadunt sunt solidi similes. Exemplum superficialium, inter 72 & 2 cadit 12 inter 6. & 24 etiam cadit. 12. inter 24 & 3000. cadunt 120 & 600, vt vides à latere. Et ita si 12 cadit medius inter 24 & 6. erunt

24. 12. 6.

24. 120. 600. 3000.

24 & 6 similes superficiales. Et si inter 24 & 3000 cadunt 120 & 600 in continua proportione erunt 24 & 3000, solidi numeri & similes. Corolarium & medius inter superficiales est latus producti vnius in alterum, vt medius inter 6 & 24 est 12 latus 144 producti 6 in 24. in solidis autem nunc dicam.

16 Cum fuerint duo solidi similes ex ductu cuiuslibet illorum in quadratum alterius producitur cubus. Et si cubus producatur ex ductu vnius in quadratum alterius erunt solidi, hi similes & radices horum cuborum sunt illi duo numeri medij proportionales de quibus in præcedente regula diximus. Et hæc regula non est Euclidis, sed eam addidimus propter similitudinem. Exemplum igitur sint vt dictum est 16 & 54 solidi si-

16. 54.
256. 2916.
13824 46656
24 36

miles & fiant quadrata illorum 256. & 2916 & ducantur hæc in solidos mutuo, id est 256 in 54 & 2916 in 16 & producatur 13824 & 46656. dico quod hi sunt cubi. Et eorum radices cubicæ quæ sunt 24 & 36 sunt mediæ in continua proportione inter 16 & 54, & hæc regula 13. regulæ respondet.

17 Si duo numeri similes solidi superficialesve per eundem numerum producantur aut diuidantur qui prodibunt erunt similes eodē modo, id est ex superficialibus superficiales, ex solidis solidi. Hæc ab Euclide non ponitur, sed tamen pendet vt diuiso 3000 & 24 per 4 exeunt 750, & 6 solidi similes ducto etiam 4 in 3000 & 24 producuntur 12000 & 96 solidi similes. Sic diuisis 24 & 150 su-

Solidi.
3000 24
\4/
750 6
12000 96

Superficiales.
24 150
\2/
12 75
48 300

perficialibus similibus per 2. prodeunt 12 & 75 superficiales similes & ducto 2. in 24 & 150 producuntur eadem ratione 48 & 300 similes superficiales.

18 Omnes duo numeri similes, vni alij eadem ratione inter se similes erunt, seu superficiales, seu solidi velut 6 & 96 sunt ambo similes 24 vt superficiales, igitur etiam inter se similes erunt superficiales, & 192 & 3000 sunt similes ambo ad 24, vt solidus est igitur & ipsi inter similes erunt solidi. Hanc etiam Euclides non demonstrauit.

19 Numeri omnes similes superficiales solidive nisi fuerint quadrati vel cubi sunt inuicē compositi. Nam si vnus alium numerat compositi sunt per Euclidem. Si non superficiales sunt in proportione duorum quadratorum per 11. regulam à quibus secundum vnum numerum numerantur. Numerus igitur ille ambos numerat igitur sunt inuicē compositi patet hoc ex dictis ibi & in 12 regula, nam 75 & 12 sunt tripli 4 & 25 quadratorum, & 750 & 6 sunt sexcupli ad cubos igitur ambo numerantur a 6. ideo sunt inuicem compositi vel aliter quia Euclides demonstrat, quod quatuor numeri primi non possunt esse proportionales: igitur duo sunt compositi saltē & ideo numerātur à primis eiusdē proportionis.

20 Duobus numeris contra se primis tertius non potest in continua illorum proportione constitui, vt cum 5 & 7. nec cum 5 & 12. nec cum 4 & 9. in medio tamen potest.

21 Omnis numerus numerans totum & detractum numerat residuum, vt 3 numerat 105 & 21 igitur numerabit etiam 84.

22 Par numerus cum in duos diuiditur ambo sunt similes in hoc, id est vterque par est vel vterque impar. Impar vero cum diuiditur in duos diuiditur dissimiles in imparem & parem. Vt 10 quia est par cum diuiditur in 7 & 3 diuiditur in duos impares: cumque in 6 & 4 in duos pares, sed 9 cum diuiditur in 7 & 2. vnus est par alter impar. Par tres habet species pariter parem & est qui à solo binario, vt numero primo diuidi potest, & est ex serie continue proportionalium in proportione dupla, vt 2.4.8. pariter impar cuius dimidium est impar, vt 10 & 50. impariter par cuius dimidium est par: sed non licet diuidendo vsque ad vnitatem descendere, vt 12 & 28.

23 Adiacent huic sumptæ etiam ex Euclide consimiles quædam regulæ. Et est quod producti ex primis numeris sunt primi ad omnes exceptis producentibus, & his quos numerāt vt 35 productus ex 7 & 5 est primus ad omnes numeros quos nec 5 nec 7 numerant.

24 Omnis numerus minimus numeratus ab aliquot numeris primis numerat omnes numeros ab eisdem numeratos. Exemplum 105 numeratus à 7. 5. 3. numerat 210. & 315. quos illi numerant. Et hoc quia 105 est minimus ab illis numeratus.

25 Omnes numeri inuicem primi, sunt in sua proportione minimi, vt 35. & 52. & 5. & 7.

26 Numeri compositi inuicem non sunt in sua proportione minimi: sed à minimis suæ proportionis numerantur. Vt 140.100.36.24. compositi inuicem, quia 4. omnes eos numerat numerantur æqualiter à 35.25.9.6. minimis suæ proportionis.

27 Omnes numeri quorum differentia est numerus primus sunt adinuicem primi: nisi numerus ille numeret ambos, exemplum 52 & 35, differunt in 17. numero primo & 17 non numerat 35 igitur 35 & 52 sunt inuicem primi, omnes igitur numeri vnitate differentes sunt inuicem primi.

28 Si duo numeri differant per numerum compositum & alter eorum differentiæ communicet illi erunt inuicem compositi, vt 48 & 30 differunt in 18, qui est compositus ad 30 ideo 30 & 48 sunt inuicem compositi. Vbi autem 18 non esset istorum, differentia tunc non sequitur. Vt 15 est compositus ad 8 & 15 qui tamen inter se sunt primi.

*De eisdem numeris secundum Boëtium.*

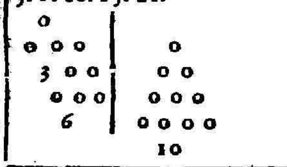
29 Numeri solidi superficialesque apud Boëtium alia intelliguntur ratione quam apud Euclidem. Nam quadrati & cubi apud Boëtium à forma dicuntur: apud Euclidem autem propter multiplicationis genus, ideo apud Boëtium etiam numeri primi possunt esse superficiales & solidi & pentagoni ac pyramidales. Linearis itaque quilibet numerus qui Figura non constituit & sic omnes numeri lineares dici possunt. Solus autem binarius sic linearis est quod non potest esse superficies Exemplum habes in Figura.

30 Superficialium quidam sunt trigoni quidam quadrati, alij pentagoni, alij exagoni. Trigoni igitur careant sic constituta naturali

2. oo
3. ooo
4. oooo
5. ooooo

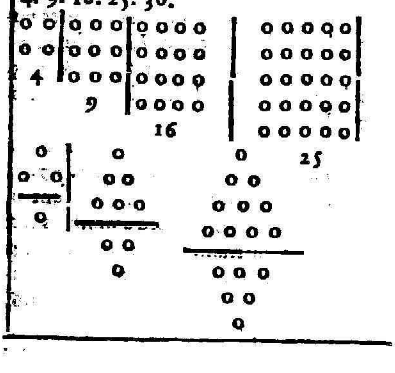
numerorum serie iunge ab vnitate omnes & constabūtur trigoni, exēplum iunge 1 & 2 fit 3 primus trigonus iungo etiam 1. 2. 3. fit 6 secundus trigonus. Iungo 1.2.3.4. fit 10 tertius trigonus, & sic de 15 & 21. Quomodo vero figuram trigonam efforment vides.

1. 2. 3. 4. 5. 6.
3. 6. 10. 15. 21.



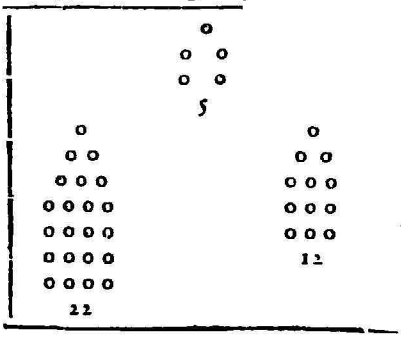
31 Quadratorum vero creatio fit ex imparium serie omnibus ab vnitate iunctis. Et ideo constant quadrati numeri apud Boëtium, alia causa quam apud Euclidem. Veruntamen sunt ipsi quadrati iidem apud ambos & in hoc conueniunt. Exemplum igitur constituta imparium serie iungo 1 & 3 fit 4 primus quadratorum, iungo etiam 1. 3. 5. fit 9. secundus quadratorum. Iungo etiam alios eodem modo vt fiant quadrati semper assumendo omnes ab vnitate impares & eos simul colligendo. Sed figura quadratorum est vt vides à latere assumptis totidem ex vtraque parte secundum longitudinem & latitudinem. Sed quadrata singula fiunt ex suis trigonis correspondentibus & præcedente vt prima figura quadratorum constat ex prima trigonorum & vnitate, secunda quadratorum ex prima secunda trigonorum, & tertia quadratorum ex tertia & secunda trigonorum iunctis capitibus aduersis vt vides.

1. 3. 5. 7. 9. 11
4. 9. 16. 25. 36.



Pentagoni autem creantur ex serie numerorum ab vnitate sumpta, duobus semper intermissis inde addendo omnes ab vnitate vsque ad eū quem constituisti vltimum, forma vero illorum est quam vides. Vt autem modum illius cognoscas, scire debes quod sicut quadrati ex trigonis 32

1. 4. 7. 10. 13.
5. 12. 22. 35.



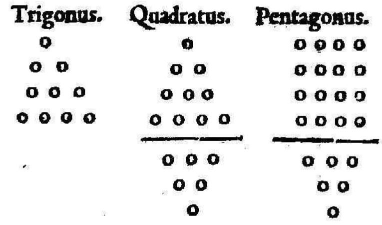
fiunt sic pentagoni ex quadratis ac trigonis: ac rursus exagona à pentagona & trigona ei correspondente. Et generaliter omnis figura fit à præcedente sui ordinis & trigona vel vnitate si nulla sit præcedens, exemplum prima eptagonarum ex secunda exagonarum & prima triangulari & tertia eptagonarum, ex tertia exagonarum, & secunda triangula. Et sic septima eptagonarum ex septima exagona & sexta triangula & sic de aliis.

Verum creatio ex numeris generalis sic habetur constitue seriem numerorum tribus semper intermissis minus ab vnitate quam sic habet numerus laterū & illos iunge sic in trigona nullum intermittens in quadrata, vnum, in pentagona, duos, in exagona, tres, in eptagona quatuor, & sic de aliis inde colligendo habebis numeros superficiales, vt in Exemplo. 33

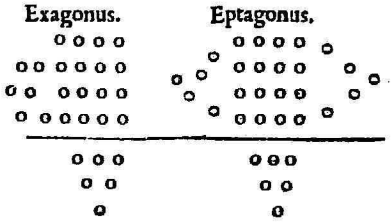
Trigoni series 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
Trigoni numeri 3. 6. 10. 15. 21. 28.
Pentagonorum series 4. 7. 10. 13. 16.
Pentagoni numeri 5. 12. 22. 35. 51.
Eptagonorum series 1. 6. 11. 16. 21. 26.
Eptagoni numeri 7. 18. 44. 65. 91.
Quadratorum series 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13.
Quadrati numeri 4. 9. 16. 25. 36. 49.
Exagonorum series 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25.
Exagoni numeri 6. 15. 28. 45. 66. 91.
Octagonorum series 1. 7. 13. 19. 25. 31. 37.
Octagoni numeri 8. 21. 40. 65. 96. 133.

Ratio igitur satis manifesta est in omnibus quomodo creari debeant. Et quomodo vnusquisque ex præcedentibus oriatur sic constat, ex hoc exemplo.

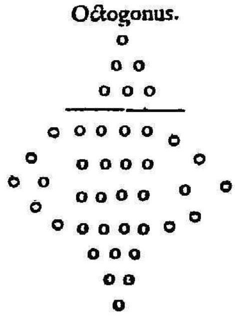
Trigonus. Quadratus. Pentagonus.



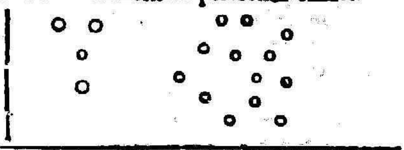
Exagonus. Eptagonus.



Octogonus.



34 Numeri circulares etiam dici possunt omnes, qui a. o. vel 1. vel 5. vel 6. producuntur. Nam in idē redeunt vt 5 in 5 facit 25. 11 in 11 facit 121 & 6 in 6 facit 36 & 10 in 10 facit 100 igitur 25. 36. 100. & 121. circulares possunt dici eo quod terminantur suis producentibus. Et eodem modo cubi ex his producti vt 125 & 216 & 1000 & 1331. Sphærici horum tamen Boëtius non meminit, quoniam ad Figuram non pertinent: ergo vere circulares à serie numerorum cominus ab vnitate proportionalium prodeunt, vt 1. 3. 9. 27. vel 1. 4. 16. 64. erunt igitur circulares qui ex his fiunt, in prima serie igitur 4. 13. 40. in secunda autem 5. 21. 85. forma vero hæc primorum, facile autem erit diuisis circulis secundum proportionem Figuram ostendere quæ quanto pluribus constabit numeris sic perfectior euadet.



35 Habet etiam Boëtius solidos suos quos nos corporeos, vt ab his differant qui ab Euclide describuntur vocabimus ex his primi Pyramidales constant ex numeris trigonis ab vnitate computatis, vt sic à latere vides, Figura autem cum corporea sit in plano minime referri potest.

Trigonorum series 1. 3. 6. 10. 15.
Pyramidales 4. 10. 20. 35.

Fiunt & Pyramides quadratarum & pentagonarum basium ex numeris quadratis pentagonis & exagonis ab vnitate dispositis inde collectis omnibus ab vnitate vt in superficialibus. Habet autem quodlibet cor- 36

Quadr. 1. 4. 9. 16.
Pyram. 5. 14. 30.
Pentag. 1. 5. 12. 22.
Pyram. 6. 18. 40.
Exag. 1. 6. 15. 28.
Pyram. 3. 22. 50.

pus ex his efformatum totidem superficies quotus est numerus primus pyramidalis. Vt Quadrata pyramis quinque pentagona sex, è quibus vna quæ est basis constat tot lateribus quotus est numerus superficialis primus, vt quadrata pyramis quatuor pentagona quinque ceteræ omnes superficies quæ in contrarium tendunt trigonæ sunt.

Curtæ autem pyramides dicuntur cum à perfecta pyramide abiicit prima vnitas, aut si vnitas & primus superficialis detrahantur sic 9 & 19, sunt curtæ pyramides trigonæ. Sic 13 & 29 curtæ pyramides quadratæ. Sic etiam 53 est pyramis exagona curta & in vniuersum cum pyramis eiusdem generis à pyramide aufertur, Curta pyramis, velut etiam in corporibus relinquitur. 37

Corporei autem numeri constantes sex superficiebus quadrilateris quatuor sunt generum cubi qui ex numero in suum quadratum producuntur, vt 8 ex 2 in 4 & 27 ex 3 in 9. & 125 ex 5 in 25. Bomisci qui ex tribus inæqualibus, vt cum 30 ex 5 3 & 2. produci intelligitur. Oportet autem illos esse vt hi sunt inuicem primos. Asseres quod ex aliquo quadrato in numerum latere suo maiorem fiunt, vt 80 ex 5 in 16. est autem 5 maior radice 16. Laterculi cum producuntur ex quadrato in numerum eius radice minorem, vt 48 ex 3. in 16. 38

Cum vero superficialis numerus producitur à duobus numeris sola vnitate differentibus dicitur altera parte longior vt 10 ex 5 & 4, cum vero à duobus plusquam vnitate differentibus dicitur ante longior, vt 20 cum produci intelligitur ex 10 & 2. 39

### *De Proprietatibus vnius numeri, vel singularium alicuius speciei.*

Vnitatis hoc est primum priuilegium, nam in vnoquoque perfectorum numerorum genere collocatur. Est enim quadrata cubus, quadrata quadrati ac si deinceps. Item pentagona, exagona, atque sic deinceps. Rursus Pyramis circularis, & sphærica. Verum laterculus aut Bomiscus aut curta pyramis non est: hæc enim imperfecta sunt & contra rationem lateris quadrati cubici relati omniumque perfectarum denominationum. Secundum est quod nec multiplicando auget, nec diuidendo minuit. Tertium quod si detrahatur vel addatur cuiusque numero, diuiso maiore per minorem, qui exit tantum facit ductus per maiorem quantum illi additus, vt si ad 4 addam vnitatem fit 5 diuiso 5 40 per 4 exit $1\frac{1}{4}$ sic additus ad 5 vel multiplicatus per 5 facit $6\frac{1}{4}$. Quartum est quod si numero addatur vnitas aut detrahatur diuidaturque minor per maiore prouenies tantum facit detractus à minore quantum per illum multiplicatus. Vt in exemplo diuidendo 4 per 5 exit $\frac{4}{5}$ hic ductus in 4 vel detractus à 4 producit semper $3\frac{1}{5}$. Quintum est quod si numero addatur vnitas, vel detrahatur, tantum fit diuiso quadrato maioris per minorem, quantum diuiso maiore per eundem minorem & prouentu ipsi maiori addito, vt in 4 & 5 diuido 25 quadratum 5 per 4 exit $6\frac{1}{4}$ & tantum fit diuidendo 5 per 4 & exit $1\frac{1}{4}$, & addito ei ipso maiore, scilicet 5 nam fit $6\frac{1}{4}$ Sextum est quod in eisdem tantum fit diuiso quadrato minoris per maiorem quantum si à minore detrahat quod prouenit diuiso minore per maiorem. Vt diuiso 16 quadrato 4 per 5 exit $3\frac{1}{5}$ & tantum fit detrahendo $\frac{4}{5}$, qui prouenit ex diuisione 4 per 5 ab ipso 4. Septimum est quod ipsa vnitas omnibus suis radicibus seu lateribus æqualis est. Octauum quod si latus est vnitas, ipsum æquatur singulis suis productis vt quadrato suo vel cubo. Nonum ex hoc sequitur, & est quod producta omnia lateribus æqualia sunt, tamen etiam inter se vt cubus quadrato & cubus lateri quadrato & latus cubicum lateri quadrato & sic de aliis. Decimum quod quisque duo numeri vnitatem producunt, latera etiam illorum & quadrata & cubica & relata, & sic de aliis. Item quadrata illorum cubi & relata producent semper vnitatem. Vt si 4 & $\frac{1}{4}$ producunt vnitatem 2 & $\frac{1}{2}$ eorum radices idem producent & 16 & $\frac{1}{16}$ eodem modo. Et si 5 p. ℞ 2 & 5 m̃ ℞ 2 producunt vnitatem. Igitur radices quadratæ horum, vel cubicæ, vel relatæ, vel quadrata, vel cubi horum vnitate inuicem ducta producent. Vndecimum omnis etiam numerus ea maior diuidendo minuit multiplicando auget. Et omnis ea minor, diuidendo auget & multiplicando minuit, vt si diuidas 5 per 1 exit 15, & si multiplices 5 per $\frac{1}{3}$ exit $1\frac{2}{3}$. Duodecimum ipsa supplet naturam cuiuscunque numeri in denominationibus, sic vt non indigeamus inuenta æquatione, altera operatione vt videbitur in arte magna: nam si posueris 2 105 ab initio oportebit postmodum duplicare æstimationem inuentam. Tertiumdecimum est cum duo numeri vnitate differunt ipsi necessario sunt inuicem primi, vt 4 & 5. Quartumdecimum cum fuerint quotlibet numeri ab vnitate proportionales in integris, tertius erit quadratus secundi, & quartus cubus & sic deinceps. Reliquæ proprietates numerorum continuæ ab vnitate proportionalium explicabunt in capitulo quarto. Quintumdecimum cum duo numeri æqualiter ab vnitate distiterint productum vnius in aliorum æquale est ei quod fit ducta differentia minoris in se & ea ab vnitate detracta. Vt $\frac{1}{3}$ in $1\frac{2}{3}$ producit $\frac{5}{9}$ quod est tantum quantum si duceres $\frac{2}{3}$ differentiam $\frac{1}{3}$ ab vnitate & produceret $\frac{4}{9}$, & hoc productum ab vnitate detraheres. Multæ aliæ possent proprietates his addi quas breuitatis causa omitto.

Nouenarij proprietas triplex est, ipse enim 41
æquale superfluum relinquit, siue diuidat litterarum aggregatum seu significatum per illas. Velut capio 534 si diuidatur per 9 relinquitur 3. & tantundem relinquitur diuiso 12 aggregato 5 & 4 & 3, nam relinquitur 3. etiam eodem modo sequitur altera proprietas. Et est quod immutando litteras res redit ad idem, vt si capias 534 & 435 & 543 & 453 & 354 semper ex diuisione per 9 relinquitur 3. & ideo literæ omnes dispositæ seu notæ omnino nihil immutant. Tertia est quod addendo notas vacuas non quotquot volueris in diuisione semper idem relinquitur. Vt si diuiso 10 per 9 relinquitur 1 diuiso 100. & 1000 & 10000 per 9 relinquitur 1. & diuiso 23 per 9 extra relinquitur 5 ideo diuiso 230 & 2300 & 23000 & sic deinceps per 9 semper supererit 5

Denarij autem proprietas est quod sem- 42
per ad idem redit: nam vt dicebas in numerando 1. 2. 3. 4. sic 11. 12. 13. 14. & rursus 21. 22. 23. 24. & sic de aliis. Causam quærit Aristoteles in problematibus, sed est difficile assignare eam. Nos tamen relinquimus eam ob prolixitatem orationis.

Nullus numerus integer addita radice ali- 43
cuius generis potest remanere sub illo genere. Vnde nullus numerus quadratus addita radice quadrata potest esse numerus quadratus, nec vllus cubus addita radice seu latere cubico potest fieri cubus, nec vllus numerus relatus poterit addita radice relata esse numerus relatus. Vnde 6 non potest esse quadratus, quia componitur ex 4 quadrato, & 2 latere suo. Nec 10 potest esse cubus, cõponitur enim ex 8 cubo & latere suo & similiter 54 non potest esse relatus, componitur enim ex 32 relato & 2 latere eius. Hoc autem potest ostendi nam tale aggregatum, vtpote 30 producitur ex 5. in 1. plus seipso, id est in 6. nam in se ductum producit quadratum suum, & in vnitatem seipsum igitur latus 30 est proportionale inter 6 & 5, quare non potest esse integer numerus. Quare nec fractus differentia in initio tractatus tertij. Nam ibi ostendimus quod numerus fractus integri radix esse non potest eodem modo in omnibus denominationibus vsque in infinitum, sequitur latus compositi esse minus numero radicis prioris addita vnitate, & minus priore radice. In partibus autem numerorum potest esse, vt in 5. quæst. 10. cap. 1.

Omnis numerus cubus abiectis 6 relin- 44
quit suam radicem, quæ si sit maior 6. oportet relinquere tantundem vel totiens 6, vt remaneat radix vel dic melius ab omni cubo si suam abieceris radicem numerus, qui relinquitur est multiplex. 6. vt capio. 8. abiice 2 relinquitur. 6. qui per 6. potest diuidi. Et ex 27 abiecto 3 latere suo cubico, relinquitur 24. qui est plus ad 6. & detracto ex 1331 latere suo cubico 11 relinquitur 1320 qui est multiplex ad 6. nam ex 6. in 220 fit 1320. & sic de aliis.

Omnis numerus relatus abiecta sua ra- 45
dice si sit relatus primus relinquit numerum multiplicem ad 10. vt ex 32 abiecto 2 relinquitur 30 ex 243 abicto 3 relinquitur

tur

tui 240 ex 16807 relato primo 7 abiecto 7 relinquitur 16800, & patet quod 30 & 240 & 16800 poſſunt diuidi per 10 & ſunt illi multiplices.

46 Omnis numerus relatus ſecundus abiecta ſua radice poteſt diuidi per 14 exemplum capio 128 relatum ſecundum 2 abiicio 2 relinquitur 126, qui eſt multiplex ad 14 nam 9 in 14 producit 126. item capio 2187 relatum ſecundum 3 & abiicio ipſum 3 relinquitur 2184 quod eſt multiplex ad 14, nam 14 in 156 ductum producit 2184. & eodem modo 78125 eſt relatum ſecundum de 5 abiecto 5 relinquitur 78120, qui poteſt diuidi per 14 nam ductu 14 in 5580 fit 78120.

47 Cum igitur in quadratis abiecta radice reſiduum per 2 poſſit diuidi in cubis per 6 in primis relatis per 10 in ſecundis relatis per 14. exiſtimari oportet vna intrinſeca denominatione abiecta radice, reſiduum diuidi per numerum qui ex priore diuidente & 4 iungatur. Sed tamen non ſic eſt quia 512 eſt cubus cubi 2. abiecto 2 relinquitur 510. qui diuiditur a. 17. a. 10. & a. 3. & compoſitis, id eſt productis ex his ſemper igitur per 30 diuidi poterit. Nam per 17 non eſt niſi caſu, vt 19683 eſt cubus cubi 3 abiecto 3 reſiduum quod eſt 19680 diuiditur per 30 & 40353607. cubus cubi 7 abiecto 7 diuidi poteſt per 30 & exit 1343120. Sed cubus quadrati & quadratus quadrati non gaudent niſi priuilegio quadrati, id eſt vt poſſint abiecta ſua radice diuidi per 2 & ſic de aliis paribus denominationibus à latere ipſo initium numerandi ſumendo.

### *De numeris ex 2. Elementorum Euclidis & 13. eiuſdem.*

48 Cum fuerit numerus in plures partes diuiſus quod fit ex omnibus ſuis partibus in alium quempiam vel etiam in ſe ipſum æquale eſt eſſe quod fit ex numero diuiſo in eundem alium vel in ſeipſum velut diuido 10 & 5. 3 in 2 quos duco in 7. exempli gratia fiunt 35. 21. 14. qui iuncti faciunt 70 & tantum fit ex 7 in 10 numerum qui diuiditur eodem modo fit ſi 10 ducatur in ſeipſum fit 100 & ex 10 in 5. 3. 2. fit 50. 30. 20. qui iuncti faciunt 100.

49 Cum fuerit numerus diuiſus in duas partes: productum totius in vnam partem æquale eſt ductui eiuſdem partis in ſe & in alteram iunctis ſimul. Vt ſi diuidam 10 in 7 & 3 productum 10 in 7 eſt 70, & hoc eſt æquale ductui 7 in ſe, & eſt 49. & 7 in 3 & eſt 21 iunctis.

50 Si numerus in duas partes diuidatur quadratum totius æquale eſt quadratis partium & duplo producti vnius in alteram iunctis. Vt capio 10 diuiſum in 7 & 3 quadratum totius id eſt 10 eſt 100 & hoc æquatur 49 quadrato 7. 9. quadrato 3. & 42 duplo producti 7 in 3 ſimul iunctus. Nam 49. 9 & 42 iuncti faciunt 100.

51 Si numerus in duas partes inæquales diuidatur quadratū medietatis æquale eſt ductui vnius partis in altera cū quadrato differentiæ dimidij & vnius partis. Exemplum diuido 10 in 7 & 3 quadratum 5 dimidij 10 æquale eſt ductui 7 in 3 quod eſt 21 cum quadrato 2 quod eſt 4 eſt autem 2 differentia 7 partis vnius à 5 dimidio 10.

Et in eodem caſu quadrata partium inæqualium iuncta ſunt æqualia duplo quadrati dimidij & duplo quadrati eiuſdem differentiæ. Exemplum quadrata 7 & 3 ſunt 49 & 9 quæ iuncta faciunt 58 & hoc eſt æquale duplo 25 quadrati 5 & duplo 4 quadrati. 2. & 5 eſt dimidium 10 & 2 differentia & duplum 25 eſt 50 & duplum 4 eſt 8 qui iuncti faciunt 58. 52

Cumque aliquis numerus in Partes æquales diuiditur eique adiungitur alius numerus quod fit ex toto aggregato in additum cum quadrato dimidij æquale eſt quadrato aggregati ex dimidio & addito: Exemplum diuido 10 in 5 & 5 addo 3. fit 13 ductum in 3 facit 39 eſt autem 13 aggregatum & 3 additum addo ad 39. 25 quadratum dimidij fit 64 quadratum aggregati 5 dimidij & 3 additi. 53

Et in eodem caſu quadratum aggregati cum quadrato additi iuncta, faciunt duplum aggregati quadratorum dimidij & aggregati ex dimidio & addito. Exemplū, quadratū 13 eſt 169 quadratum 3 eſt 9 quæ iuncta faciunt 178 duplum aggregati ex 64 quadrato & 25 quadrato. 5. eſt autem 13 aggregatum numeri diuiſi & additi & 3 additus numerus & 5. dimidium diuiſi numeri, & 8 aggregatum ex dimidio quod eſt 5 & addito quod eſt 3. 54

Cumque fuerit numerus in duas partes diuiſus quadratum totius cum quadrato alterius partis æquale eſt duplo eius quod fit ex toto in eandem partem cum quadrato alterius partis. Exemplum diuiſo 10 in 7 & 3 quadratum 10 quod eſt 100 cum quadrato 3 quod eſt 9 æquatur duplo eius quod fit ex 10 toto in 3 eandem partem & eſt 60 cum quadrato 7 alterius partis quod eſt 49. nā ex 49 fit 60 fit 109 & ex 100 & 9 fit etiā 109. 55

Cumque dimiſeris numerum in duas partes addideriſque toti vnum illarum partium quadratum aggregatum eſt æquale ductui prioris numeri in partem additam quater cum quadrato alterius partis. Exemplum diuiſo 10 in 7 & 3 & addito 3 ad 10 fit 13 cuius quadratum eſt 169 & hoc æquale eſt quadruplo producti 10 in 3 quod eſt 120 cum quadrato 7 quod eſt 49. 56

Cum fuerit quantitas diuiſa ſic quod illud quod fit ex tota in minorem partem ſit æquale quadrato maioris partis vt docebimus in 11 capitulo dicetur ea quantitas diuiſa, ſecundum proportionem habentem medium & duo extrema. Id eſt quod talis proportio, eſt cauſa quod media ſit proportionalis inter duo extrema eſt autem media maior pars: extremæ tota quantitas & minor, hanc igitur proportionem breuitatis cauſa ſic nominabimus 5 p 5 m. exemplum ſi 6 diuidatur in ℞. 45 m̄. 3 & 9 m̄ ℞ 45. 57

Si igitur toti ſic diuiſæ maior portio addatur erit aggregatum ſub eadem proportione diuiſum: eiuſque portio maior prior quantitas. Exemplum ad 6 addo ℞ 45 m̄ 3. fit totum 3 p. ℞. 45. & eius partes ſunt 6 & ℞. 45. 58

℞. 45. m̄. 3 ideo ductis ℞. 45 p. 3 in ℞ 45 m̄. 3 fit 36 quadratum maioris partis. Et hæc additio in infinitum procedit.

59 Et si diuisa eodem modo quantitate dimidium totius addatur maiori parti erit quadratum aggregati quintuplum quadrato dimidij totius. Exemplum addo ad ℞ 45 m̄ 3 dimidium 6 quod 3 est fit ℞. 45 cuius quadratum est 45 quincuplum 9 quadrato dimidij totius.

*Corollariũ.* Ex quo patet quod idem fiet addito dimidio maioris partis ad minorem quadratum enim aggregati quintuplum erit quadrato dimidij ipsius maioris partis.

60 Cumque fuerit numerus 5 p 5 m diuisus quadratum totius & maioris partis iuncta sunt tripla quadrato maioris, vt quadratum 6. est 36 & quadratum 9 m̄ ℞ 45 est 126 m̄ ℞ 14580 & hoc cum 36 facit 162 m̄ ℞ 14580 & hoc est triplum 54 m̄ ℞ 1620 quadrati maioris.

61 Cumque fuerit numerus eodem modo diuisus quadratum aggregati ex tota & minore parte quantuplum est quadrato maioris partis. Exemplum numerus fuit. 6. minor pars 9 m̄ ℞ 45 totum aggregatum 15 m̄ ℞ 45 quadratum 270 m̄ ℞ 40500, & hoc est quintuplum 54 m̄ ℞ 1620 quadrati maioris partis quæ fuit ℞ 45 m̄ 5.

### *De numeris vt pendent ex his quæ nuper dicta sunt ex Euclide.*

62 Si numerus 5 p 5 m. fuerit diuisus detracta minore parte ex maiore, maior erit sub eadem proportione diuisa maiorque portio eius detracta pars. Patet cum sit conuersum 58. regulæ. Exemplum ex ℞ 45 m̄ 3 abiicio 9 m̄ ℞ 45 fit ℞ 180 m̄ 12. igitur ℞ 45 m̄ ℞ 3 & 9 m̄ ℞ 45 & 180 m̄ 12 sunt proportionales.

63 Si fuerit numerus eodem modo diuisus, erit quod fit ex toto & maiore parte in quadratum minoris æquale cubo maioris. Sit ab diuisa. 5 p. 5 m. in c maior portio eius sit, ac dico quod illud quod fit ex ba & ac in quadratum bc æquale est cubo ac, quia enim quod fit ex ab in quadratum bc æquale est ei quod fit ex bc in quadratum ac exemplum cap. quinto huius abscindatur a d æqualis b c eritque ex præcedenti ac diuisa 5 p 5 m. in detur eius maior portio a d quod igitur fit ex d b in quadratum b c æquale est ei quod fit ex ad. in quadratum ca quia ad fuit æqualis bc. Quod autem fit ex cd in quadratum ac, est per dicta in capite quinto regula eadem æquale ei quod fit ex a c in quadratum a d. quare in quadratum b c igitur quod fit ex a d & d c in quadratum a c est æquale ei quod fit ex a b & a c in quadratum b c. at quod fit ex a d & d c in quadratum, a c est æquale cubo, ac igitur cubus, ac æqualis est ei quod fit ex a b & ac in quadratum bc. Exemplum igitur diuisi. 6. in ℞ 45 m̄ 3 & 9 m̄ ℞ 45 & quadratum 9 m̄ ℞ 45 est ab m̄ ℞ 14580 ductum in aggregatum totius & maioris partis, quod est ℞ 45 p. 3 idem producit quod cubus ℞ 45 m̄. 3 id est ℞ 233280 m̄ 432, nam ex ℞ 45 in ℞ 14580 m̄ fit 810 m̄ à quo detracto 378 p. relinquitur 432 m̄. pari ratione ℞ 14580 est. 18^m. ℞ 45 quæ ducenda est per 3 igitur productum erit. 54^m. ℞ 45 igitur ducendo 126 ℞ 45 ductam per 72 p. quam 54 & sic fiet rursus 233280. Aliter & facilius ac generalius demõstratur sit a b sic diuisa in c maior portio b c & addatur d b æqualis ab. Igitur per quinquagesimã octauã regulã dc est diuisa 5p5m in 6 & eius portio maior est bd quare proportio cd ad db, vt db, ad, bc, sed eadẽ quæ fuit d b, a d, b c, a d, c a, eo quod d b est æqualis ba igitur dc. db. bc. ca. sunt quatuor quantitates continuæ proportionales per vndecimam quinti Elementorum quare ex regulis capio 6. huius quod fit ex d c in quadratum c a est æquale cubo b c. & rursus quod fit ex ac in quadratum c d æquale erit cubo d b vel b a totius.

Cum fuerit numerus in duas partes diuisus, differentia quadratorum partium, æqualis est ductui differentiæ partium in numerum diuisum. Exemplum capio 8. diuisum in 5 & 3, differentia quadratorum harum partium est 16. & tantum fit ex 8 numero diuiso in 2. differentiam 5. & 3. 64

Si fuerit numerus in aliquot partes diuisus quadrata partium nunquam possunt aggregare plus quadrato aggregati, nec minus eadem parte quadrati aggregati, secundum quam aggregatum ipsum diuisum est exemplũ 10. diuidatur in quatuor partes. puta 4. 3. 2. & 1. quadrata iuncta, non possunt excedere 100 quadratum aggregati, nec esse minora 25 quarta parte 100 quadrati aggregati, & ita si diuideretur in quinque partes non possunt esse minora 20 parte quinta quadrati aggregati quod est 100. 65

Si numerus in duas partes diuidatur quadratum totius & differentiæ partium quadratis ambarum partium dupla esse necesse est vt si 10 diuidatur in 7 & 3 quadratum 10 quod est 10 cum 16 quadrato 4 differentiæ dupla sunt ad quadratum 7 & quadratum 3 iuncta simul & faciunt 18. 66

10
100
7 —— 3
4
16
116
49 —— 9
58

Si fuerit numerus per duo æqualia & duo inæqualia diuisus proportio aggregati maioris partis & medietatis ad aggregatum medietatis & minoris partis, est velut differentiæ quadratorum maioris partis & medietatis ad differentiam quadratorum medietatis & minoris velut capio 10. & diuido per æqualia in 5, & per inæqualia in 7 & 3, dico quod proportio 12 aggregai 7 & 5 ad 8 aggregatum 5 & 3 est vt 24 differentiæ quadratorum 7 & 5 ad 16 differentiam quadratorum 5 & 3. 67

10
7 3
12 5 8
49. 25. 9
24. 16

Cum fuerit numerus cuius quadratum dimidij sit æquale ipsi numero vel duplum, vel triplum, vel sexquialterum, tunc nullius numeri minoris illo quadratum dimidij erit æquale illi numero vel duplum aut triplum 68

plum

plum aut sexqualiterum aut maius exemplum quadratum dimidij 4 est 4, dico quod nullius numeri minoris 4 quadratum dimidij poterit esse æquale illi numero velut quadratum primum $\frac{3}{2}$ est $2\frac{1}{4}$ quod est minus necessario quam 3 duplum $1\frac{1}{2}$ & ita quadratum dimidij 6 quod est 9 est sexquialterum ad 6, dico quod nullius numeri minoris 6 quadratum dimidij potest esse maius vel æquale sexquialtero eius numeri velut quadratum dimidij 5 est $6\frac{1}{4}$, & hoc est minus sexquialtero ad 5 & sic de aliis.

69 Corollariū. Ex hac & quinta regula huius habetur quod si quis dicat inuenias duos numeros qui tantum faciant iuncti quantum multiplicati, & eorum aggregatum sit minus 4 dices quod ergo est impossibilis, quia dimidiū 4 in se ductum producit 4 ad vnguem, igitur ex hac regula dimidium cuiuslibet numeri minoris 4 producit minus illo numero, sed quadratum dimidij cuiuslibet numeri. Est maius producto partium inuicem per quintam regulam igitur ex partibus talis numeri inuicem productis, si numerus est minor 4 producitur minus aggregato, igitur non potest produci aggregatum quare ergo est impossibilis.

70 Si numerus in duas partes diuidatur, quadrata ambarum partium, pariter excepta excedunt duplum producti vnius. In alterum in quadrato differentiæ partium. Exemplum diuido 10 in 7 & 3, horum quadrata iuncta faciunt 58. hoc excedit 42 duplum producti 7 in 3, in 16 quadrato differentiæ, nam differentia 7 & 3 14. Vnde si quis dicat diuide ℞ ℞ 8 in duas partes quarum quadrata iuncta superent duplum producti vnius in alterum in 1. dices igitur ℞ 1 & est 1 est differentia. Igitur partes sunt ℞ ℞ $\frac{1}{2}$ m̄ $\frac{1}{2}$ & ita in quadratorum formatione multas facies quæstiones.

### *De aliis proprietatibus numeri vt comparatur ad maiorem vel minorem se in diuidendo.*

71 Cum diuersis numerum quem vis per alium numerum deinde per plus aut minus priore diuisore exit proportio differentiæ secundi & primi prouentus ad primum prouentum velut differentiæ diuisorum ad secundum diuisorem. Exemplum diuido 60 per 3 exit 20 diuido 60 per 3 p. 7 quod est dicere 10 exit 6 qualis est proportio 14 differentiæ prouentuum primi & secundi ad 20 prouentum primum talis est proportio 7 differentiæ diuisorum ad 10 secundum diuisorem & similiter qualis est proportio 14 differentiæ prouentuum ad 6, prouentuum secundum talis est proportio 7 differentiæ diuisorum ad 3 diuisorem primum, & ita si diuidas 60 per 10 exit 6 deinde si diuidas per 10 m̄. 8, quod est dicere 2 exit 30 proportio 24 differentiæ prouentuum ad 30 prouentuum, secundum est veluti 8 differentiæ diuisorum

| | |
|---|---|
| 60 | |
| 3 | 20 |
| 3 p. 7 | 6 |

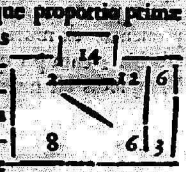
| | |
|---|---|
| 60 | |
| 10 | 6 |
| 10 m̄ 8 | 30 |

ad 10 diuisorem primum & proportio 4 differentiæ prouentuum ad 6 prouentuum, primum est vt 8 differentiæ diuisorum ad 10 m̄ 8 quod est 2 diuisorem, secundum ideo regula vna est vt sit commutatim differentiarum prouentuum ad primum & diuisorum ad secundum vel differentiarum prouentuum ad secundum prouentum & differentiarum diuisorum ad primum diuisorem.

Cum dixeris $\frac{1}{5}$ numeri ductum in medietatem producit eundem numerum dices igitur talis numerus est 10 multiplicando denominatores inuicem & numeratores inuicem & diuidendo productum denominatorum per productum numeratorum exemplum $\frac{3}{4}$ numeri ductum in $\frac{5}{6}$ eiusdem producit $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{15}{24}$, ipsum numerum dices igitur numerus est $1\frac{3}{5}$ qui prouenit diuiso 24 per 15. 72

Ex hac & præcedente sequitur regula, quod cum diuiseris numerum per aliquam partem suam p. aliquo numero, vt proueniat illa pars, aut diuiseris eundem numerum per alium numerum, p. parte aliqua diuisoris, vt proueniat eadem pars diuisoris, tunc pars illa est residuum cuiusdam ℞ vniuersalis, quod fit sumpta ℞ aggregati eiusdem diuidendi, cum quadrato dimidij numeri diuisoris detracta ab hac ℞ medietate diuisoris. Et sit exemplum dixit quis diuisi numerum per $\frac{1}{5}$ p. 2 & prouenit $\frac{1}{5}$ pones illum numerum 1 pos & dices quod $\frac{1}{5}$ pos est ℞ v 1 pos p. 1 m̄ 1, nam diuiso 2 fit 1 cuius quadratum 1 additum ad 1 pos facit 1 pos p. 1, cuius ℞ est ℞ v 1 pos p. 1, ab hoc detracto 1 dimidio 2 relinquitur: æstimatio de $\frac{1}{5}$ pos ℞ v 1 pos p. 1 m̄ 1, & prouentus æquatur 3. Et ideo sequitur quod 5 denominator æquiualet 1 pos diuisæ per ℞ v 1 pos p. 1 m̄ 1, & generaliter pars illa semper est ℞ numeri diuidendi addito prius quadrato dimidij numeri diuisoris, detracto eodem dimidio ab eadem ℞. Quare pars illa cum dimidio numeri additi est ℞ diuidendi addito ei prius quadrato dimidij numeri propositi. 73

Si numerus aliquis in duas ac duas partes diuidatur fueritque proportio primæ partis secundæ diuisionis ad primam partem primæ diuisionis duplicata proportioni secundæ partis, primæ diuisionis ad secundam partem secundæ diuisionis, tunc diuisa secunda parte secundæ diuisionis, per primam partem primæ diuisionis, quod exit est Regula prouentus aggregati ex vtraque secunda parte vtriusque diuisionis diuiso tali aggregato per primam partem primæ diuisionis exemplum Capio 14. & diuiso in 2 & 12 diuisione prima, & in 8 & 6 diuisione secunda, & proportio 8 ad 2 duplicata proportioni 12 ad 6, dico quod diuiso 6, secunda parte secundæ diuisionis per 2 primum, primæ diuisionis prouentus exiens, quod est 3 est Regula eius, quod prouenit diuiso 18 aggregato 12 & 6 vtriusque partis per 2 eandem primam partem primæ diuisionis: prouenit 74




enim

enim 9 quadratum 3, idem verò erit si diuiserimus 12 secundam partem primæ diuisionis per 8 primam partem secundæ diuisionis exibit $1\frac{2}{3}$ ℞ $2\frac{1}{4}$ prouentus 18 aggregati secundarum partium diuisi per eundem 8 primam partem secundæ diuisionis.

75 Cum fuerit numerus in duas partes diuisus productum vnius earum in Regula alterius æquale est ei quod fit detrahendo eandem ℞ & ℞ totius & residui quadratum ducendo in eandem Regulam & similiter ducendo eandem partem, cuius accepisti Regulam in idem residuum bis, & producta iungendo simul. Exemplum capio 9 diuiso in 5 & 4 duco 5 in 2 ℞ 4 fit 10, dico quod detracto 2 ℞ 4 ex 3 ℞ 9 totius & fit 1, quod duco 2 ℞ 4 in 1 quadratum 1 & fit 2, deinde duco 4 parte cuius ℞ accepisti in 1 residuum bis & fit 8 quod additum ad 2 facit 10, & potest demonstrari geometrice.

76 Cum diuiseris numerum in duas & duas partes inæquales productum partium minoris differentiæ excedit productum partium maioris differentiæ, in eo quod quadratum mediæ differentiæ maioris excedit quadratum mediæ differentiæ minoris, seu in producto partium minoris differentiæ detracta ab vtrisque minore parte maioris differentiæ. Exemplum capio 10. & diuido in 7 & 3, & item in 9 & 1, dico quod 21 productum 7 in 3 excedit 9 productum ex 9 in 1 in 12, quod est differentia 16 quadrati 4 dimidij 8 differentiæ 9 & 1 à 4 quadrato 2 dimidiæ differentiæ 7 & 3 vel in eodem 12, quia producitur ex 6 in 2, quæ sunt partes minoris differentiæ detracta vnitate, quæ est minor pars alterius diuisionis.

77 Si fuerit aliquis numerus diuisus in duas partes ex quarum mutua diuisione producatur pars maior semper habebis, cum p. 1 pos p. 1 æqualia tot quadratis quotus est numerus m̃ 1, & si proueniat ex mutua diuisione minor pars habebis 1 cum p. 1, quod p. 1 æqualia tot rebus quotus est numerus diuisus m̃ 1, & semper extimatio rei est ipsa proportio partiũ exemplum si diuidas 10 in duas partes ex quarum mutua diuisione proueniat ex mutua diuisione maior pars habebis 1 cum p. 1 quoad p. 1 æqualia tot rebus quotus est numerus diuisus m̃ 1, & semper extimatio rei est ipsa proportio partium. Exemplum si diuidas 10 in duas partes ex quarum mutua diuisione proueniat maior pars tunc habebis 1 cum p. 1 pos p. 1 æqualia 9 quoad & si velis vt proueniat minor pars habebis 1 cum p. 1 quoad p. 1, æqualia 9 pos & extimatio rei est proportio impar partium & potest demonstrari.

78 Si fuerit numerus in duos æquales & duos inæquales diuisus proportio differentiæ radicis minoris partis à radice medietatis ad differentiam radicis medietatis à radice minoris est velut aggregati radicis maioris partis & radicis medietatis ad aggregatum radicis medietatis & radicis minoris partis. Exemplum capio 338 qui diuidatur in 169 & 169 per æqualia & per inæqualia in 289 & 49, dico quod proportio 6 differentiæ 13 radicis 169 & 7 ℞ 49 ad 4 differentiam 17 ℞ 289 & 13 radicis 109 est velut 30 aggregati 13 & 17 duarum maiorum radicum ad 20 aggregatum duarum minorum idem in irrationalibus numeris. Demonstrauimus enim hoc generaliter in secundo nouæ geometriæ super nouam propositionem.

| | | |
|---|---|---|
| 338 | | |
| 169 | | |
| 289 | | 49 |
| 17. | 13. | 7 |
| 4 | | 6 |
| 30 | | 20 |

### *De proprietatibus numerorum vt pendent ex 7. 8. & 9. Elementorum.*

Impares numeri semper numerantur distantes à se in serie imparium per tot intermedia quotus est numerus, quo ipsi ab vnitate distant. Exemplum 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. dico igitur quod 3 superat vnitatem in 2 ideo numerabit 9 duobus intermissis, & deinde 15 duobus aliis intermissis, deinde 21 & 5 superat vnitatem in 4, ideo numerabit 15 quatuor intermissis & 25 aliis quatuor numeris intermissis, qui sunt 17. 19. 21. 23. & ita 7 numerabit sex intermissis 21 & ita de aliis. 79

Est autem proprium numerorum quadratorum vt in qualibet proportione continua ab vnitate inchoata ipsi omnes locos obsideant impares, vt in dupla tertius ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 80